Санкт-Петербургский государственный университет

МОГУНОВА Вероника Александровна

Выпускная квалификационная работа

О точной константе в теореме о продолжении

Уровень образования: Специалитет
Направление 01.05.01 “Фундаментальные математика и механика”
Образовательная программа СМ.5007. “Фундаментальные математика и механика”
Профиль: Теория функций

Научный руководитель: Профессор математико-механического факультета, доктор ф.м. наук, профессор, Назаров А. И.

Рецензент: Профессор механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, доктор ф.м. наук, профессор, Асташова И. В.

Санкт-Петербург
2019

Saint Petersburg State University

MOGUNOVA Veronika Alexandrovna

Qualification Research Paper

On the sharp constant in an extension theorem

Education level: Specialitet
Specialty 01.05.01 “Fundamental Mathematics and Mechanics”
Educational program CM.5007. “Fundamental Mathematics and Mechanics”
Department: Function theory

Advisor: Professor of mathematics at Mathematics and Mechanics Faculty, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Nazarov A. I.

Reviewer: Professor of mathematics at Mechanics and Mathematics Faculty at Lomonosov Moscow State University, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Astashova I. V.

Saint Petersburg
2019

Содержание

1. Введение

Задача о норме оператора продолжения из конуса была предложена В. Г. Мазья. Он также высказал гипотезу об ответе в двумерном случае. В настоящей работе эта гипотеза подтверждена, а также получены некоторые предварительные результаты для трёхмерного случая.

2. Постановка задачи

Пусть область K – круговой конус в пространстве $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат. Угол между образующей и осью конуса обозначим за $\alpha \in (0, \pi)$. Дополнение к замыканию конуса обозначим за $\widetilde{K}$.

Пусть H_1 – пространство гладких финитных в $\mathbb{R}^n$ функций, суженных на K. Введём норму в H_1:

$$||u||_{H_1} = \left(\int\limits_K |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

а затем пополним H_1 по этой норме. Получившееся пространство обозначим за H.

После пополнения норма может стать полунормой. Но если $||u||_H = 0$, то $u \equiv const$. При $n \geqslant 3$ есть неравенство Харди:

$$\int \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx \leqslant C \int |\nabla u(x)|^2 dx .$$

Из него следует, что если последовательность была фундаментальна по норме в H, то она будет фундаментальна и по норме Харди. Тогда у предела будет конечная норма Харди, что неверно для констант. Поэтому $||u||_H$ действительно будет нормой при $n \geqslant 3$.

Обозначим за $\widetilde{H}$ аналогичное пространство в $\widetilde{K}$.

Введём оператор $T : H \to \widetilde{H}$. По функции u из H он строит функцию $\widetilde{u}$ из $\widetilde{H}$, совпадающую с функцией u на границе конуса K, и минимизирующую по эти граничным данным функционал $||v||_{\widetilde{H}}$.

Задача – найти норму оператора T.

$$||T||^2 = \sup_{u\in H} \frac{||Tu||^2_{\widetilde{H}}}{||u||^2_H} = \sup_{u\in H} \frac{\int\limits_{\widetilde{K}} |\nabla \widetilde{u}|^2 dx}{\int\limits_K |\nabla u|^2 dx} \ .$$

Супремум берётся по всем ненулевым элементам из H. В случае $n = 2$ супремум берётся по всем $u \in H$, не равным константам. Но можно считать, что мы берём супремум по ненулевым функциям из H_1, так как H_1 плотно в H. Заметим, что Tu зависит только от значения u на границе конуса. То есть при фиксированных граничных значениях числитель не меняется, а знаменатель минимален, когда функция u минимизирует функционал $||v||_H$ с этими граничными данными. Таким образом, можно считать, что мы ищем супремум по всевозможным граничным данным у выражения

$$||T||^2 = \sup \frac{\int\limits_{\widetilde{K}} |\nabla \widetilde{u}|^2 dx}{\int\limits_K |\nabla u|^2 dx} \ ,$$

где функции u и $\widetilde{u}$ минимизируют соответствующие функционалы.

3. Двумерный случай

Преобразуем выражение из знаменателя. Обозначим его за

$$I[u] := \int\limits_K |\nabla u|^2 dx \ .$$

Перейдём к полярным координатам:

$$I[u] = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\alpha} \left(r u_r^2 + \frac{1}{r} u_\phi^2 \right) d\phi dr \ .$$

Сделаем замену переменных $e^\lambda = r$ и обозначим $w(\lambda, \phi) = u(e^\lambda, \phi)$:

$$I[u] = \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_0^{2\alpha} \left(w_\lambda^2 + w_\phi^2 \right) d\phi d\lambda \ .$$

Обозначим $v(s,\phi)$ – преобразование Фурье функции $w(\lambda,\phi)$ по переменной λ (то есть преобразование Меллина функции $u(r,\phi)$), и воспользуемся равенством Парсеваля:

$$I[u] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\alpha} \big(s^2 v^2 + v_\phi^2\big) d\phi ds \ .$$

Числитель преобразуется аналогично. Таким образом, мы ищем супремум по граничным данным на границе полосы

$$||T||^2 = \sup \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi-2\alpha} \big(s^2 \widetilde{v}^2 + \widetilde{v}_\phi^2\big) d\phi ds}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\alpha} \big(s^2 v^2 + v_\phi^2\big) d\phi ds} \ ,$$

где функции v и $\widetilde{v}$ минимизируют соответствующие функционалы.

Обозначим

$$f_1(s) = \int\limits_{0}^{2\pi-2\alpha} \big(s^2 \widetilde{v}^2 + \widetilde{v}_\phi^2\big) d\phi \ \ , \ \ f_2(s) = \int\limits_{0}^{2\alpha} \big(s^2 v^2 + v_\phi^2\big) d\phi$$

– две положительные функции от s. Воспользуемся неравенством для положительных функций:

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(s) ds}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(s) ds} \leqslant \sup_s \frac{f_1(s)}{f_2(s)} \ .$$

При этом в функционале, который минимизирует v, нет производных по s, поэтому значение v на уровне s_0 зависит только от граничных данных в точке s_0. Так что если мы будем брать данные на границе полосы, сосредоточенные в окрестности точки супремума, то мы сможем приблизиться к этому супремуму.

Итого, мы ищем супремум по вещественным s и по значениям на концах отрезка у выражения

$$||T||^2 = \sup \frac{\int\limits_0^{2\pi-2\alpha} \left(s^2\widetilde{v}^2 + \widetilde{v}_\phi^2\right) d\phi}{\int\limits_0^{2\alpha} \left(s^2 v^2 + v_\phi^2\right) d\phi} \ , \tag{1}$$

где функции v и $\widetilde{v}$ минимизируют соответствующие функционалы.

Не умаляя общности, можно считать, что $s \geqslant 0$. Напишем уравнение Эйлера для v:

$$s^2 v - v'' = 0 \ ,$$

в случае $s = 0$ его решение:

$$v = c_1\phi + c_2 \ .$$

Аналогично

$$\widetilde{v} = d_1\phi + d_2 \ .$$

Но функции v и $\widetilde{v}$ удовлетворяют одинаковым граничным условиям, поэтому

$$c_2 = 2(\pi - \alpha)d_1 + d_2 \ ; \qquad 2\alpha c_1 + c_2 = d_2 \ ,$$

откуда

$$c_1 = -d_1 \frac{\pi - \alpha}{\alpha} \ .$$

Поэтому

$$\frac{\int\limits_0^{2\pi-2\alpha} \widetilde{v}_\phi^2 d\phi}{\int\limits_0^{2\alpha} v_\phi^2 d\phi} = \frac{\alpha}{\pi - \alpha} \ .$$

Теперь пусть $s > 0$. Тогда решение уравнения Эйлера:

$$v = c_1 e^{s\phi} + c_2 e^{-s\phi} \ ,$$

Аналогично

$$\widetilde{v} = d_1 e^{s\phi} + d_2 e^{-s\phi} \ .$$

Таким образом,

$$\frac{\int\limits_0^{2\pi-2\alpha} \left(s^2 \widetilde{v}^2 + \widetilde{v}_\phi^2\right) d\phi}{\int\limits_0^{2\alpha} \left(s^2 v^2 + v_\phi^2\right) d\phi} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^{2\pi-2\alpha} \left(s^2 (d_1 e^{s\phi} + d_2 e^{-s\phi})^2 + (d_1 s e^{s\phi} - d_2 s e^{-s\phi})^2\right) d\phi}{\int\limits_0^{2\alpha} \left(s^2 (c_1 e^{s\phi} + c_2 e^{-s\phi})^2 + (c_1 s e^{s\phi} - c_2 s e^{-s\phi})^2\right) d\phi} =$$

$$= \frac{d_1^2 (e^{4\pi s - 4\alpha s} - 1) - d_2^2 (e^{-4\pi s + 4\alpha s} - 1)}{c_1^2 (e^{4\alpha s} - 1) - c_2^2 (e^{-4\alpha s} - 1)} \ .$$

Но обе функции v и $\overline{v}$ удовлетворяют одинаковым граничным условиям на концах отрезка, откуда следуют равества:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= d_1 e^{2(\pi-\alpha)s} + d_2 e^{-2(\pi-\alpha)s} \ ; \\ c_1 e^{2\alpha s} + c_2 e^{-2\alpha s} &= d_1 + d_2 \ . \end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$x := e^{2\alpha s} \quad ; \qquad y := e^{2\pi s} \ .$$

Заметим, что $y > x > 1$. Выразим d_1 и d_2 через c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{x(c_1 y + c_2 y - c_1 x^2 - c_2)}{y^2 - x^2} \ ; \\ d_2 &= \frac{c_1 x^2 y^2 + c_2 y^2 - c_1 x^2 y - c_2 x^2 y}{x(y^2 - x^2)} \ . \end{aligned}$$

Подставим это в выражение для супремума (1) и получим, что мы ищем супремум по c_1, c_2 и s у выражения

$$\frac{c_1^2x^2y^2+4c_1c_2x^2y^2-4c_1^2x^4y-4c_1c_2x^2y+c_2^2x^2y^2-4c_1c_2x^4y}{(c_1^2x^2+c_2^2)(x^2-1)(y^2-x^2)}+$$
$$+\frac{-4c_2^2x^2y+c_1^2x^6+4c_1c_2x^4+c_2^2x^2+c_1^2x^4y^2+c_2^2y^2+c_1^2x^4+c_2^2x^4}{(c_1^2x^2+c_2^2)(x^2-1)(y^2-x^2)}\,.$$

Пусть $c_2 \neq 0$. Поскольку это выражение однородно степени 0 относительно c_1 и c_2, можно сделать замену переменной $d = x\frac{c_1}{c_2}$. Получим, что мы ищем супремум по вещественным s и d у выражения

$$\frac{-4x^2y+(x^2+1)(x^2+y^2)}{(x^2-1)(y^2-x^2)}+\frac{d}{d^2+1}\cdot\frac{4x(y-x^2)(y-1)}{(x^2-1)(y^2-x^2)}\,. \tag{2}$$

Найдём при каждом фиксированном s (то есть при фиксированных x и y) супремум по d, а потом супремум по s. Ясно, что $d = \pm 1$, в зависимости от знака выражения

$$4x\frac{(y-x^2)(y-1)}{(x^2-1)(y^2-x^2)} = 4e^{2\alpha s}\frac{(e^{2\pi s}-e^{4\alpha s})(e^{2\pi s}-1)}{(e^{4\alpha s}-1)(e^{4\pi s}-e^{4\alpha s})}\,.$$

Знаменатель всегда больше нуля. Числитель неотрицателен при $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ и неположителен при $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ при любых $s > 0$.

Заметим, что если $c_2 = 0$, то мы получим выражение (2) при $d = 0$, что не оптимально.

Таким образом, разбираем два случая в зависимости от α.

3.1. Случай $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

В этом случае супремум по d достигается при $d = 1$, и выражение (2) приобретает вид

$$\frac{(x+1)(y-x)}{(x-1)(x+y)} = \frac{(e^{2\alpha s}+1)(e^{2\pi s}-e^{2\alpha s})}{(e^{2\alpha s}-1)(e^{2\alpha s}+e^{2\pi s})}\,. \tag{3}$$

При $s \to \infty$ дробь (3) стремится к 1, а при $s \to 0$ выражение (3) стремится к $\frac{\pi-\alpha}{\alpha} > 1$. Чтобы показать, что $\frac{\pi-\alpha}{\alpha}$ является супремумом, покажем, что (3) всегда меньше или равно $\frac{\pi-\alpha}{\alpha}$.

Обозначим $z := e^{2s}$. Тогда доказываем, что при $z > 1$

$$\begin{aligned} \alpha(z^{\pi+\alpha} + z^{\pi} - z^{2\alpha} - z^{\alpha}) &\leqslant (\pi-\alpha)(z^{\pi+\alpha} - z^{\pi} + z^{2\alpha} - z^{\alpha}) \\ \pi(z^{\pi-\alpha} - z^{\alpha}) &\leqslant (\pi - 2\alpha)(z^{\pi} - 1) \end{aligned}$$

При $z = 1$ имеет место равенство. Чтобы показать, что неравенство верно при $z > 1$, докажем соответствующее неравенство для производных:

$$\begin{aligned} \pi((\pi-\alpha)z^{\pi-\alpha-1} - \alpha z^{\alpha-1}) &\leqslant (\pi-2\alpha)\pi z^{\pi-1} \\ (\pi-\alpha)z^{\pi-2\alpha} - \alpha &\leqslant (\pi-2\alpha)z^{\pi-\alpha} \end{aligned}$$

При $z = 1$ имеет место равенство. Чтобы показать, что неравенство верно при $z > 1$, докажем соответствующее неравенство для производных:

$$(\pi-\alpha)(\pi-2\alpha)z^{\pi-2\alpha-1} \leqslant (\pi-2\alpha)(\pi-\alpha)z^{\pi-\alpha-1} ,$$

что верно.

3.2. **Случай $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.** В этом случае супремум по d достигается при $d = -1$, и выражение (2) приобретает вид

$$\frac{(x-1)(x+y)}{(x+1)(y-x)} = \frac{(e^{2\alpha s}-1)(e^{2\alpha s}+e^{2\pi s})}{(e^{2\alpha s}+1)(e^{2\pi s}-e^{2\alpha s})} \tag{4}$$

При $s \to \infty$ выражение (4) стремится к 1, а при $s \to 0$ дробь (4) стремится к $\frac{\alpha}{\pi-\alpha} > 1$. Чтобы показать, что $\frac{\alpha}{\pi-\alpha}$ является супремумом, покажем, что (4) всегда меньше или равно $\frac{\alpha}{\pi-\alpha}$.

Обозначим $z := e^{2s}$. Тогда доказываем, что при $z > 1$

$$\begin{aligned} (\pi-\alpha)(z^{\pi+\alpha} - z^{\pi} + z^{2\alpha} - z^{\alpha}) &\leqslant \alpha(z^{\pi+\alpha} + z^{\pi} - z^{2\alpha} - z^{\alpha}) \\ \pi(z^{\alpha} - z^{\pi-\alpha}) &\leqslant (2\alpha-\pi)(z^{\pi} - 1) \end{aligned}$$

При $z = 1$ имеет место равенство. Чтобы показать, что неравенство верно при $z > 1$, докажем соответствующее неравенство для производных:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha z^{\alpha-1} - (\pi-\alpha)z^{\pi-\alpha-1}) &\leqslant (2\alpha-\pi)\pi z^{\pi-1} \\ \alpha z^{2\alpha-\pi} - (\pi-\alpha) &\leqslant (2\alpha-\pi)z^{\alpha} \end{aligned}$$

При $z = 1$ имеет место равенство. Чтобы показать, что неравенство верно при $z > 1$, докажем соответствующее неравенство для производных:

$$\alpha(2\alpha-\pi)z^{2\alpha-\pi-1} \leqslant \alpha(2\alpha-\pi)z^{\alpha-1} ,$$

что верно.

3.3. **Результат.** Таким образом, мы получили ответ в двумерном случае:

$$||T||^2 = max\Big(\frac{\pi-\alpha}{\alpha}, \frac{\alpha}{\pi-\alpha}\Big) .$$

4. Трёхмерный случай

Преобразуем выражение из знаменателя. Обозначим его за

$$J[u] := \int\limits_K |\nabla u|^2 dx .$$

Запишем в сферических координатах:

$$J[u] = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\alpha r^2 \sin\theta\Big(u_r^2 + \frac{|\nabla' u|^2}{r^2}\Big) d\theta d\phi dr ,$$

где $|\nabla' u|^2 = \frac{u_\phi^2}{\sin^2\theta} + u_\theta^2$ – квадрат угловой компоненты градиента.

Введём новую функцию:

$$w(r,\phi,\theta) = r^{\frac{1}{2}} u(r,\phi,\theta) ,$$

и обозначим за $v(s,\phi,\theta)$ преобразование Меллина функции $w(r,\phi,\theta)$, тогда

$$J[u] = \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\alpha \sin\theta\Big(s^2 v^2 + \frac{v^2}{4} + |\nabla' v|^2\Big) d\theta d\phi ds .$$

Числитель преобразуется аналогично. Таким образом, мы решаем задачу о нахождении супремума по граничным данным (на границе цилиндра) у выражения

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi-\alpha}\sin\theta\left(s^2\widetilde{v}^2+\frac{\widetilde{v}^2}{4}+|\nabla'\widetilde{v}|^2\right)d\theta d\phi ds}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\alpha}\sin\theta\left(s^2v^2+\frac{v^2}{4}+|\nabla'v|^2\right)d\theta d\phi ds}\ .$$

Аналогично двумерному случаю эта задача сводится к поиску супремума по граничным данным на окружности $l(\phi)$ и по вещественным s у выражения:

$$\frac{\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi-\alpha}\sin\theta\left(s^2\widetilde{v}^2+\frac{\widetilde{v}^2}{4}+|\nabla'\widetilde{v}|^2\right)d\theta d\phi}{\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\alpha}\sin\theta\left(s^2v^2+\frac{v^2}{4}+|\nabla'v|^2\right)d\theta d\phi}\ ,$$

при этом v и $\widetilde{v}$ минимизируют соответствующие функционалы.

Напишем уравнение Эйлера для v:

$$s^2v+\frac{v}{4}-\widetilde{\Delta}v=0\ , \tag{5}$$

где $\widetilde{\Delta}$ – оператор Бельтрами, то есть

$$\widetilde{\Delta}v=\frac{v_{\phi\phi}}{\sin^2\theta}+\frac{\big(v_\theta\sin\theta\big)_\theta}{\sin\theta}.$$

Зафиксируем s. Граничные данные – функция на окружности $l(\phi)$. Разлагая функцию $l(\phi)$ в ряд Фурье, решаем задачу для v и $\widetilde{v}$. В уравнении (5) делятся переменные, поэтому решение тоже получается в виде ряда Фурье. Далее, пользуясь ортогональностью базисных функций на окружности и неравенством для положительных чисел

$$\frac{a+b}{c+d}\leqslant max\left(\frac{a}{c},\frac{b}{d}\right)\ ,$$

получаем, что супремум этого отношения достаточно брать только по базисным функциям. В силу симметрии задачи случай $l(\phi)=$

$sin(k\phi)$ эквивалентен случаю $l(\phi) = cos(k\phi)$, поэтому не умаляя общности считаем, что $l(\phi) = cos(k\phi)$, где $k \in \mathbb{N}$, или $l \equiv 1$ (случай $k = 0$).

Таким образом подставляем $v(\phi, \theta) = cos(k\phi)g(\theta)$ в выражение из знаменателя, которое минимизируем. Интеграл по ϕ берётся, и мы получаем

$$\pi \int\limits_0^{\alpha} \sin\theta \Big(s^2 g^2(\theta) + \frac{g^2(\theta)}{4} + \frac{k^2 g^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \big(g'(\theta)\big)^2 \Big) d\theta$$

(в случае $k = 0$ константа перед интегралом будет 2π).

Функция g должна минимизировать соответствующий функционал. Уравнение Эйлера будет иметь вид:

$$g(\theta)\left(\sin\theta \Big(\frac{1}{4} + s^2 \Big) + \frac{k^2}{\sin\theta} \right) - \big(g'(\theta)\sin\theta\big)' = 0 \ . \tag{6}$$

Сделаем замену переменной $\cos\theta = x$, и обозначим $q(x) = q(\cos\theta) = g(\theta)$, тогда получается уравнение:

$$(1 - x^2)q'' - 2xq' - \left(\frac{1}{4} + s^2 + \frac{k^2}{1 - x^2} \right) q = 0 \ , \tag{7}$$

причём его решение должно быть регулярно при $x = 1$.

Это уравнение Лежандра. Его решения – линейная комбинация присоединённых функций Лежандра первого и второго рода, но только одна из них (первого рода) регулярна в единице, поэтому она и будет решением.

Таким образом $g(\theta) = P^k_{-\frac{1}{2}+2is}(\cos\theta)$, где $P^k_{-\frac{1}{2}+2is}$ – присоединённая функция Лежандра первого рода степени $\big(-\frac{1}{2} + 2is\big)$ и порядка k ($s \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$).

Выпишем функционал, который мы минимизировали, и проинтегрируем его по частям:

$$\pi \int\limits_0^{\alpha} \sin\theta \left(s^2 g^2(\theta) + \frac{g^2(\theta)}{4} + \frac{k^2 g^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \big(g'(\theta)\big)^2 \right) d\theta =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\alpha} g(\theta) \Big(s^2 g(\theta)\sin\theta + \frac{g(\theta)}{4}\sin\theta + \frac{k^2 g(\theta)}{\sin(\theta)} - \big(g'(\theta)\sin\theta\big)' \Big) d\theta +$$

$$+ \pi g(\theta) g'(\theta) \sin\theta \Big|_0^{\alpha} = \pi g(\alpha) g'(\alpha) \sin(\alpha) \ .$$

Последнее верно, так как под интегралом стоит $g(\theta)$, умноженная на левую часть уравнения (6).

Случай $\widetilde{v}$ аналогичен, поэтому $\widetilde{g}$ имеет такой же вид. Но g и $\widetilde{g}$ удовлетворяют одинаковому граничному условию, поэтому их значения на концах должны стыковаться. То есть $\widetilde{g}(\pi - \alpha) = g(\alpha)$. Отсюда находится константа пропорциональности между g и $\widetilde{g}$. То есть $\widetilde{g}(\theta) = cg(\theta)$, где

$$c = \frac{g(\alpha)}{g(\pi - \alpha)} \ .$$

Таким образом,

$$\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi-\alpha} \sin\theta \left(s^2 \widetilde{v}^2 + \frac{\widetilde{v}^2}{4} + |\nabla' \widetilde{v}|^2 \right) d\theta d\phi}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\alpha} \sin\theta \left(s^2 v^2 + \frac{v^2}{4} + |\nabla' v|^2 \right) d\theta d\phi} =$$

$$= \frac{\pi \widetilde{g}(\pi-\alpha)\widetilde{g}'(\pi-\alpha)\sin(\pi-\alpha)}{\pi g(\alpha) g'(\alpha)\sin(\alpha)} = \frac{g(\alpha)g'(\pi-\alpha)}{g'(\alpha)g(\pi-\alpha)} \ .$$

4.1. **Изучение случая s=0.** Далее в этой работе мы будем исследовать функцию

$$f(x) := \frac{q(x)q'(-x)}{q'(x)q(-x)} = \frac{g(\alpha)g'(\pi-\alpha)}{g'(\alpha)g(\pi-\alpha)} \ , \tag{8}$$

где $x = \cos\alpha$ и $q(x) = P^k_{-\frac{1}{2}}(x)$. Из формулы [3, 8.751.1] видно, что функция $q(x)$ положительна на $(-1, 1)$ и имеет асимптотику $a(1-x)^{\frac{k}{2}}$ при $x \to 1$, где a – положительная константа (своя для каждого k). При любых вещественных $k > 0$ из уравнения (7) получаем, что $q(x)$ монотонно убывает: ведь если $q'(x^*) = 0$ при некотором x^*, то из уравнения следует, что $q''(x^*) > 0$. Тогда на $(x^*, 1)$ оказывается, что $q'(x) > 0$, что невозможно, так как $q(x)$ положительна и стремится к нулю при $x \to 1$. Тогда $q'(x)$ всегда одного знака. Тогда она отрицательна, так как $q(x)$ положительна и стремится к нулю при $x \to 1$. Таким образом, для любого вещественного $k > 0$ функция $q(x)$ положительна и убывает. Переходя к пределу получаем, что это верно и для $k = 0$.

4.2. **Значения f в ± 1.** Мы знаем асимптотику $q(x)$ в окрестности 1:

$$q(x) \sim a(1-x)^{\frac{k}{2}} \ .$$

Из формулы [2, 7.12.20] для вронскиана решений $P^k_{-\frac{1}{2}}(x)$ и $Q^k_{-\frac{1}{2}}(x)$ следует, что асимптотика решения $Q^k_{-\frac{1}{2}}(x)$ при $x \to 1$:

$$\begin{cases} Q^k_{-\frac{1}{2}}(x) \sim d(1-x)^{-\frac{k}{2}} \text{ при } k \geqslant 1 \ , \\ Q^k_{-\frac{1}{2}}(x) \sim d \log(1-x) \text{ при } k = 0 \ , \end{cases}$$

где d – некоторая константа, своя для каждого k.

Из уравнения (7) следует, что $r(x) := q(-x)$ – тоже решение этого уравнения. То есть оно равно линейной комбинации $P^k_{-\frac{1}{2}}(x)$ и $Q^k_{-\frac{1}{2}}(x)$. При этом оно линейно независимо с $q(x)$, так как последнее монотонно убывает. Тогда коэфициент при $Q^k_{-\frac{1}{2}}(x)$ не нулевой. Отсюда получаем асиптотику $q(x)$ при $x \to -1$:

$$\begin{cases} q(x) \sim b(1+x)^{-\frac{k}{2}} \text{ при } k \geqslant 1 \ , \\ q(x) \sim b \log(1+x) \text{ при } k = 0 \ , \end{cases}$$

где b – некоторая константа, своя для каждого k.

Докажем, что при $k \geqslant 1$ функция $f(x) \to 1$ при $x \to 1$ и $x \to -1$. Понятно, что из одного следует другое, поэтому докажем для $x \to 1$.

Находим асимптотику производных:

$$q'(x) \sim -a\frac{k}{2}(1-x)^{\frac{k}{2}-1} \text{ в окрестности } 1 \text{ и}$$

$$q'(x) \sim -b\frac{k}{2}(1+x)^{-\frac{k}{2}-1} \text{ в окрестности } -1 \ .$$

Подставляя в (8) получаем, что при $x \to 1$

$$\frac{q(x)q'(-x)}{q'(x)q(-x)} \sim \frac{-a(1-x)^{\frac{k}{2}}\frac{k}{2}b(1-x)^{-\frac{k}{2}-1}}{-a\frac{k}{2}(1-x)^{\frac{k}{2}-1}b(1-x)^{-\frac{k}{2}}} \to 1 \ ,$$

что доказывает утверждение.

В случае $k = 0$ докажем, что $f(x)$ стремится к нулю при $x \to -1$ и $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to 1$. Из одного следует другое, поэтому докажем для 1.

$$q'(x) \sim c \text{ в окрестности } 1$$

из [3, 8.751.1], где c – положительная константа, и

$$q'(x) \sim b(1+x)^{-1} \text{ в окрестности } -1 \ .$$

Подставляя в (8) получаем, что при $x \to 1$

$$\frac{q(x)q'(-x)}{q'(x)q(-x)} \sim \frac{ab(1-x)^{-1}}{cb\log{(1-x)}} \to +\infty \ .$$

4.3. **Поведение в окрестности нуля.** Очевидно, что $f(0) = 1$. Докажем, что

$$f'(0) > 0 \ . \tag{9}$$

Из [1, 8.6.1, 8.6.3] знаем значения функции и её производной в точке ноль:

$$\begin{aligned} q(0) &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{4})}{\Gamma(-\frac{k}{2}+\frac{3}{4})} \ , \\ q'(0) &= \frac{2^{k+1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}{\Gamma(-\frac{k}{2}+\frac{1}{4})} \ . \end{aligned}$$

Из уравнения (7) находим значение второй производной в нуле:

$$q''(0) = \Big(\frac{1}{4} + k^2\Big) q(0) = \Big(\frac{1}{4} + k^2\Big) \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} \ .$$

Нас интересует значение в нуле у производной функции $f(x)$:

$$f'(0) = 2 \cdot \frac{(q'(0))^2 - q''(0) q(0)}{q(0) q'(0)} \ .$$

Введём обозначения:

$$A := \Gamma\bigg(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\bigg) \qquad B := \Gamma\bigg(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\bigg)$$

$$C := \Gamma\bigg(-\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\bigg) \qquad D := \Gamma\bigg(-\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\bigg)$$

Подставляем в полученное выражение значение функции и производных в нуле и используем обозначения:

$$f'(0) = 2 \cdot \frac{2^{2k+2} \big(\sin\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right)\big)^2 \frac{D^2}{C^2} - \big(\frac{1}{4} + k^2\big) 2^{2k} \big(\cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right)\big)^2 \frac{A^2}{B^2}}{2^{2k+1} \cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \frac{AD}{BC}} =$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{4 \cdot \frac{D^2}{C^2} - \big(\frac{1}{4} + k^2\big) \frac{A^2}{B^2}}{\frac{AD}{BC}} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{4 \cdot B^2 D^2 - \big(\frac{1}{4} + k^2\big) A^2 C^2}{ABCD} \ .$$

Используя формулу симметрий [1, 6.1.17.], получаем

$$AD = \frac{\pi}{sin(\pi(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}))} \quad ; \quad BC = \frac{\pi}{sin(\pi(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}))} \ ,$$

при этом $sin(\pi(\frac{k}{2} + \frac{1}{4})) \cdot sin(\pi(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})) = \frac{(-1)^k}{2}$, поэтому получаем

$$(-1)^{k+1} \cdot \frac{4 \cdot B^2 D^2 - \big(k^2 + \frac{1}{4}\big) A^2 C^2}{ABCD} =$$

$$= (-1)^{k+1+k} \frac{4B^2 \frac{2\pi^2}{A^2} - (k^2 + \frac{1}{4}) A^2 \frac{2\pi^2}{B^2}}{2\pi^2} = \frac{(k^2 + \frac{1}{4}) A^4 - 4B^4}{A^2 B^2} =$$

$$= \frac{(k^2 + \frac{1}{4}) \Big(\Gamma\Big(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\Big)\Big)^4 - 4\Big(\Gamma\Big(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\Big)\Big)^4}{\Big(\Gamma\Big(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\Big)\Big)^2 \Big(\Gamma\Big(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\Big)\Big)^2} =: Q_k \ . \qquad (10)$$

Покажем, что $Q_k \to 0$ при $k \to \infty$. Обозначим $t := \frac{k}{2} - \frac{3}{4}$. Тогда нас интересует предел при $t \to \infty$ у выражения

$$\frac{\big(4t^2 + 6t + \frac{5}{2}\big)\big(\Gamma\big(t+1\big)\big)^4 - 4\big(\Gamma\big((t + \frac{1}{2}) + 1\big)\big)^4}{\big(\Gamma\big(t+1\big)\big)^2 \big(\Gamma\big((t + \frac{1}{2})\big)\big)^2} \ .$$

Распишем уменьшаемое и вычитаемое числителя, используя формулу Стирлинга. Уменьшаемое:

$$\Big(4t^2 + 6t + \frac{5}{2}\Big)\Big(\Gamma\big(t+1\big)\Big)^4 =$$
$$= \Big(4t^2 + 6t + \frac{5}{2}\Big)(2\pi t)^2 \Big(\frac{t}{e}\Big)^{4t} \Big[1 + \frac{1}{3t} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big] =$$
$$= 4 \cdot (2\pi)^2 \cdot \frac{t^{4t+4}}{e^{4t}} + \Big(6 + \frac{4}{3}\Big) \cdot (2\pi)^2 \cdot \frac{t^{4t+3}}{e^{4t}} + O\Big(\frac{t^{4t+2}}{e^{4t}}\Big) \ .$$

Вычитаемое:

$$4\Big(\Gamma\Big(\Big(t + \frac{1}{2}\Big) + 1\Big)\Big)^4 =$$
$$= 4 \cdot (2\pi)^2 \cdot \Big(t^2 + t + \frac{1}{4}\Big)\Big(\frac{t + \frac{1}{2}}{e}\Big)^{4t+2} \Big[1 + \frac{1}{3t} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big] \stackrel{*}{=}$$
$$\stackrel{*}{=} 4 \cdot (2\pi)^2 \cdot \frac{t^{4t+4}}{e^{4t}} + \Big(6 + \frac{4}{3}\Big) \cdot (2\pi)^2 \cdot \frac{t^{4t+3}}{e^{4t}} + O\Big(\frac{t^{4t+2}}{e^{4t}}\Big) \ .$$

Равенство $*$ следует из

$$\Big(\frac{t + \frac{1}{2}}{e}\Big)^{4t+2} = \frac{t^{4t+2}}{e^{4t}} + \frac{t^{4t+1}}{2e^{4t}} + O\Big(\Big(\frac{t}{e}\Big)^{4t}\Big) \ .$$

Вычитаем из первого второе и получаем, что в числителе стоит $O\left(\frac{t^{4t+2}}{e^{4t}}\right)$. Теперь напишем, чему эквивалентен знаменатель.

$$\Big(\Gamma\big(t+1\big)\Big)^2\Big(\Gamma\Big(\Big(t+\frac{1}{2}\Big)+1\Big)\Big)^2 \backsim 2\pi t\Big(\frac{t}{e}\Big)^{2t}2\pi t\Big(\frac{t+\frac{1}{2}}{e}\Big)^{2t+1} \backsim \\ \backsim 4\pi^2 t^2\Big(\frac{t}{e}\Big)^{2t}\Big(\frac{t^{2t+1}}{e^{2t}}\Big) \backsim 4\pi^2\cdot\frac{t^{4t+3}}{e^{4t}}\ .$$

Итого получаем, что

$$\frac{\big(4t^2+6t+\frac{5}{2}\big)\big(\Gamma\big(t+1\big)\big)^4-4\big(\Gamma\big(\big(t+\frac{1}{2}\big)+1\big)\big)^4}{\big(\Gamma\big(t+1\big)\big)^2\big(\Gamma\big(\big(t+\frac{1}{2}\big)\big)\big)^2}=O\Big(\frac{1}{t}\Big)\ .$$

Таким образом, в формуле (10) $Q_k\to 0$ при $k\to\infty$. Теперь покажем, что $Q_k>0$. Для этого достаточно доказать, что подпоследовательности Q_{2n} и Q_{2n+1} монотонно убывают.

Начнём со случая $k=2n$. Тогда

$$A=\Gamma\Big(n+\frac{1}{4}\Big)\quad;\qquad B=\Gamma\Big(n+\frac{3}{4}\Big)\ ,$$

и неравенство

$$Q_{2n}>Q_{2n+2} \tag{11}$$

сводится к неравенству:

$$\frac{\Big(\Gamma\big(n+\frac{3}{4}\big)\Big)^4}{\Big(\Gamma\big(n+\frac{1}{4}\big)\Big)^4}=\frac{B^4}{A^4}>\frac{(16n^2+16n+1)(4n+1)^2}{16(4n+3)^2}\ .$$

Используя формулу удвоения [1, 6.1.18.] и значения Гамма-функции в полуцелых точках [2, 1.2.6] получаем, что

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{4}\Big)\cdot\Gamma\Big(n+\frac{3}{4}\Big)=2^{1-2\left(n+\frac{1}{4}\right)}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\Big(2n+\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{2}\pi\cdot\frac{(4n)!}{(2n)!\cdot 2^{6n}}\ .$$

Таким образом, неравенство (11) эквивалентно неравенству:

$$\frac{4\pi^4\big((4n!)\big)^4}{\big((2n!)\big)^4\cdot 2^{24n}\cdot\Big(\Gamma\big(n+\frac{1}{4}\big)\Big)^8} > \frac{(16n^2+16n+1)(4n+1)^2}{16(4n+3)^2}\ ,$$

$$y_n := \frac{64\pi^4\big((4n!)\big)^4(4n+3)^2}{\big((2n!)\big)^4\cdot 2^{24n}\cdot\Big(\Gamma\big(n+\frac{1}{4}\big)\Big)^8(16n^2+16n+1)(4n+1)^2} > 1\ .$$

Хотим доказать, что $y_n > 1$. Для этого достаточно показать, что

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} > 1 \tag{12}$$

и $y_n \to 1$. Докажем неравенство (12):

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\big((2n+2)(2n+1)\big)^4 2^{24}\Big(n+\frac{1}{4}\Big)^8\big(16n^2+48n+33\big)\big(4n+3\big)^2\big(4n+5\big)^2}{\big((4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)\big)^4\big(16n^2+16n+1\big)\big(4n+7\big)^2\big(4n+1\big)^2} =$$

$$= \frac{4096n^6+24576n^5+57088n^4+64512n^3+36208n^2+9120n+825}{4096n^6+24576n^5+57088n^4+64512n^3+36208n^2+8736n+441} > 1\ .$$

Теперь покажем, что $y_n \to 1$. По формуле Стирлинга имеем:

$$y_n = \frac{64\pi^4\big((4n!)\big)^4(4n+3)^2}{\big((2n!)\big)^4\cdot 2^{24n}\cdot\Big(\Gamma\big(n+\frac{1}{4}\big)\Big)^8(16n^2+16n+1)(4n+1)^2} \backsim$$

$$\backsim \frac{64\pi^4(8\pi n)^2\big(4n\cdot e^{-1}\big)^{16n}16n^2}{(4\pi n)^2\big(2n\cdot e^{-1}\big)^{8n}2^{24n}(2\pi n)^4\big(ne^{-1}\big)^{8n-6}e^6 16n^2\cdot 16n^2} \to 1\ .$$

Таким образом, доказано неравенство (12), а следовательно, и неравенство (11). Теперь проделаем аналогичные действия с Q_{2n+1} (случай $k = 2n+1$). Тогда

$$A = \Gamma\Big(n+\frac{3}{4}\Big) \quad ; \qquad B = \Gamma\Big(n+\frac{5}{4}\Big)\ ,$$

и неравенство

$$Q_{2n+1} > Q_{2n+3} \tag{13}$$

сводится к неравенству:

$$\frac{\left(\Gamma\left(n+\frac{5}{4}\right)\right)^4}{\left(\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)\right)^4}=\frac{B^4}{A^4}>\frac{(16n^2+32n+13)(4n+3)^2}{16(4n+5)^2}\ .$$

Используя формулу удвоения [1, 6.1.18.] и значения Гамма-функции в полуцелых точках [2, 1.2.6] получаем, что

$$\Gamma\Big(n+\frac{3}{4}\Big)\cdot\Gamma\Big(n+\frac{5}{4}\Big)=2^{1-2(n+\frac{3}{4})}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\Big(2\Big(n+\frac{3}{4}\Big)\Big)=\pi\cdot\frac{(4n+2)!}{2^{6n+\frac{5}{2}}(2n+1)!}\ .$$

Таким образом, неравенство (13) эквивалентно неравенству:

$$\left(\pi\cdot\frac{(4n+2)!}{\left(\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)\right)2^{6n+\frac{5}{2}}(2n+1)!}\right)^4>\frac{(16n^2+32n+13)(4n+3)^2}{16(4n+5)^2}\ ,$$

$$z_n:=\frac{\pi^4\big((4n+2)!\big)^4 16(4n+5)^2}{\left(\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)\right)^8 2^{24n+10}\big((2n+1)!\big)^4(16n^2+32n+13)(4n+3)^2}>1\ .$$

Итого осталось доказать, что $z_n>1$. Для этого достаточно показать, что $z_n\to1$ и монотонно убывают.

Сначала монотонное убывание:

$$\frac{z_n}{z_{n+1}}=\frac{\left(n+\frac{3}{4}\right)^8 2^{24}\big((2n+3)(2n+2)\big)^4(16n^2+64n+61)(4n+5)^2(4n+7)^2}{\big((4n+6)(4n+5)(4n+4)(4n+3)\big)^4(16n^2+32n+13)(4n+9)^2(4n+3)^2}=$$

$$=\frac{4096n^6+36864n^5+133888n^4+250368n^3+253168n^2+130704n+26901}{4096n^6+36864n^5+133888n^4+250368n^3+253168n^2+130320n+26325}>1\ ,$$

то есть $z_n>z_{n+1}$.

Осталось показать, что $z_n\to1$. По формуле Стирлинга имеем:

$$z_n=\frac{\pi^4\big((4n+2)!\big)^4 16(4n+5)^2}{\left(\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)\right)^8 2^{24n+10}\big((2n+1)!\big)^4(16n^2+32n+13)(4n+3)^2}\backsim$$

$$\backsim\frac{\pi^4\big(2\pi\cdot4n\big)^2\big(4n\big)^{16n+8}e^{-16n}\cdot16\cdot(4n)^2}{\big(2\pi n\big)^4 n^{8n-2}e^{-8n}2^{24n+10}\big(2\pi\cdot2n\big)^2\big(2n\big)^{8n+4}e^{-8n}\cdot16n^2\cdot16n^2}\to1\ .$$

Таким образом мы показали, что

$$f'(0) = Q_k > 0 \ .$$

4.4. **Сравнение с единицей.** Докажем, что при любом k

$$\begin{cases} f(x) < 1 \text{ при } x \in (-1, 0) \\ f(x) > 1 \text{ при } x \in (0, 1) \ . \end{cases} \tag{14}$$

Заметим, что для этого достаточно доказать только одно из неравенств. Докажем второе.

Зафиксируем k и ведём новую функцию:

$$y(x) = \frac{q'(x)}{q(x)} \ .$$

Так как

$$y'(x) = \left(\frac{q'(x)}{q(x)}\right)' = \frac{q''(x)}{q(x)} - \left(\frac{q'(x)}{q(x)}\right)^2 = \frac{q''(x)}{q(x)} - (y(x))^2 \ ,$$

то

$$\frac{q''(x)}{q(x)} = y'(x) + (y(x))^2 \ ,$$

и мы преобразуем уравнение (7):

$$y'(x) = -\bigl(y(x)\bigr)^2 + \frac{2x}{(1-x^2)} \cdot y(x) + \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{1-x^2}\right) \ . \tag{15}$$

Заметим, что функция $r(x) := P^k_{-\frac{1}{2}}(-x)$ тоже удовлетворяет уравнению (7). Она положительна и возрастает. Таким образом, принимая во внимание, что $\frac{q'(x)}{q(x)} < 0$ на $(0, 1)$, получаем, что мы хотим доказать, что

$$-\frac{q(x)r'(x)}{q'(x)r(x)} > 1 \iff \frac{q'(x)}{q(x)} + \frac{r'(x)}{r(x)} > 0 \text{ на } (0, 1).$$

Так как обе функции $q(x)$ и $r(x)$ удовлетворяют уравнению (7), то функции

$$y(x) = \frac{q'(x)}{q(x)} \text{ и } z(x) = \frac{r'(x)}{r(x)} \text{ удовлетворяют уравнению (15).}$$

Заметим, что так как $q(x) = r(-x)$, то $y(0) = -z(0)$ и $y'(0) = z'(0)$.

Посмотрим на произодную $y(x)$ в точке 0:

$$y'(0) = \frac{-q'(0)}{2q(0)} \cdot \frac{2 \cdot \big((q'(0))^2 - q''(0)q(0)\big)}{q(0)q'(0)} \ ,$$

где второй множитель положительный, согласно формуле (9). Сама функция q положительна и убывает, поэтому первый множитель тоже положителен. Поэтому $y'(0) = z'(0) > 0$.

Итого на $[0, 1)$ у нас есть две функции, удовлетворяющие уравнению (15) – отрицательная $y(x)$ и положительная $z(x)$, при этом $y(0) = -z(0)$, и $y'(0) = z'(0) > 0$. Мы хотим показать, что на $(0, 1)$ функция $\big(z(x) + y(x)\big)$ больше нуля. Так как в нуле значение суммы равно нулю, а производная суммы в нуле положительна, то в небольшой окрестности $(0, \epsilon)$ мы доказали это неравенство.

Для доказательства мы используем принцип сравнения. Сначала докажем, что

$$y^2(x) \leqslant \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{1-x^2}\right) \text{ на } (0,1) \ . \tag{16}$$

Функция $y(x) = \frac{q'(x)}{q(x)}$, где $q(x) = P^k_{-\frac{1}{2}}(x)$. При этом мы знаем разложение для $q(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) &= \beta \cdot (1-x)^{\frac{k}{2}} + \gamma \cdot (1-x)^{\frac{k}{2}+1} + \cdots \\ q'(x) &= -\beta \cdot \frac{k}{2} \cdot (1-x)^{\frac{k}{2}-1} - \gamma \cdot \big(\frac{k}{2}+1\big) \cdot (1-x)^{\frac{k}{2}} + \cdots \end{aligned}$$

Поэтому есть такие константы ν и μ, что

$$y(x) = -\frac{k}{2(1-x)} + \nu + \cdots = -\frac{k}{1-x^2} + \mu + O\big((1-x)\big)$$

$$y'(x) = -\frac{2xk}{(1-x^2)^2} + O(1) \ .$$

Найдём μ, подставив это в уравнение (15).

$$-\frac{2xk}{(1-x^2)^2}+O(1)=-\frac{k^2}{(1-x^2)^2}+\frac{2k\mu}{1-x^2}-\frac{2xk}{(1-x^2)^2}+\frac{2x\mu}{1-x^2}+$$
$$+\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{k^2}{1-x^2}\right)+O(1)\ ,$$
$$O(1)=\frac{2k\mu}{1-x^2}+\frac{2x\mu}{1-x^2}+\frac{1}{4(1-x^2)}=\frac{8k\mu+8x\mu+1}{4(1-x^2)}\ ,$$

то есть последнее выражение ограничено при $x=1$, поэтому

$$8k\mu+8x\mu+1\Big|_{x=1}=0\Longleftrightarrow\mu=-\frac{1}{8(k+1)}\ .$$

Обозначим число $u:=-\frac{k}{2}+\frac{\sqrt{4k^2+1}}{4}\in(0,1)$, и введём функцию

$$h(x):=-\frac{k}{1-x^2}-\frac{1}{8(k+u)}\ .$$

Для доказательства (16) докажем, что

$$|y(x)|\leqslant|h(x)|\text{ на }(0,1)\ ,\text{ и что} \tag{17}$$

$$h^2(x)\leqslant\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{k^2}{1-x^2}\right)\text{ на }(0,1)\ . \tag{18}$$

Начнём с доказательства (17).

Так как обе функции $y(x)$ и $h(x)$ отрицательные, то для (17) достаточно показать, что $y(x)>h(x)$.

$$\text{Так как } y(x)=-\frac{k}{1-x^2}-\frac{1}{8(k+1)}+o(1)\ ,\text{ а } u\in(0,1)\ ,\text{ то}$$
$$-\frac{1}{8(k+1)}>-\frac{1}{8(k+u)}\ ,$$

и мы получаем требуемое неравенство в окрестности 1.

Обозначим за $Eq[h]$ подстановку функции h в правую часть уравнения (15). Тогда

$$\begin{aligned} Eq[h](x) = &-\frac{k^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{8^2(k+u)^2} - \frac{2k}{8(k+u)(1-x^2)} - \frac{2kx}{(1-x^2)^2} - \\ &-\frac{2x}{8(k+u)(1-x^2)} + \frac{1}{4(1-x^2)} + \frac{k^2}{(1-x^2)^2} = \\ &= -\frac{2kx}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{8^2(k+u)^2} - \frac{x-u}{4(k+u)(1-x^2)} \ . \end{aligned}$$

Так как $h'(x) = -\frac{2kx}{(1-x^2)^2}$, получаем, что

$$h'(x) = Eq[h](x) + \frac{1}{8^2(k+u)^2} + \frac{x-u}{4(k+u)(1-x^2)} \ . \tag{19}$$

Покажем, что

$$v(x) := \frac{1}{8^2(k+u)^2} + \frac{x-u}{4(k+u)(1-x^2)} > 0 \text{ на } (0,1) \ . \tag{20}$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8^2(k+u)^2} + \frac{x-u}{4(k+u)(1-x^2)} &> 0 \\ -x^2 + 16(k+u)x - 16(k+u)u + 1 &> 0 \ . \end{aligned}$$

График левой части этого неравенства – вогнутая парабола, и точка $x = 1$ удовлетворяет неравенству. Поэтому оно точно будет выполняться на $(x_0, 1]$, где x_0 – левый корень квадратного уравнения. Посчитаем его:

$$x_0 = 8(k+u) - \sqrt{64(k+u)^2 - 16(k+u)u + 1} \ .$$

Подставим значение числа $u = -\frac{k}{2} + \frac{\sqrt{4k^2+1}}{4}$, тогда

$$x_0 = 4k + 2\sqrt{4k^2+1} - \sqrt{(4k + 2\sqrt{4k^2+1})^2} = 0 \ .$$

Таким образом доказано (20), и тогда из (19) получаем, что на $(0, 1)$ выполнено:

$h'(x) = Eq[h](x) + v(x)$, где $v(x)$ – строго положительная функция.

Вспомним, что в небольшой окрестности 1 верно $y(x) > h(x)$. Чтобы доказать это неравенство на $(0, 1)$, используем принцип сравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть неравенство неверно. Тогда обозначим за x_1 самую правую точку, в которой $h(x_1) = y(x_1)$. В таком случае $y(x) > h(x)$ при $x > x_1$, поэтому $y'(x_1) \geqslant h'(x_1)$. Но такое неравенство выполняться не может, так как

$$h'(x_1) = Eq[h](x_1) + v(x_1) > Eq[h](x_1) = Eq[y](x_1) = y'(x_1) \ .$$

Таким образом, мы доказали (17).

Теперь доказываем (18). Это неравенство сводится к

$$1 - 16u(k + u) < x^2 \ .$$

Подставляем значение u и получаем неравенство $0 < x^2$, которое верно на $(0, 1)$.

Неравенство (18) доказано. А из (17) и (18) следует (16).

С помощью (16) покажем, что на $(0, 1)$ функция $\big(z(x) + y(x)\big)$ больше нуля. Как мы помним, в небольшой окрестности $(0, \epsilon)$ это неравенство уже есть. Для доказательства неравенства на всём промежутке опять используем принцип сравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть в какой-то момент неравенство нарушится. Обозначим за x_2 первую точку, в которой $\big(z(x_2) + y(x_2)\big) = 0$. То есть $z(x_2) = -y(x_2)$. Обе функции y и z удовлетворяют уравнению (15), поэтому

$$\big(y(x_2) + z(x_2)\big)' = -\big(y(x_2)\big)^2 \ - \ \big(z(x_2)\big)^2 +$$
$$+\frac{2x_2}{(1 - x_2^2)} \cdot y(x_2) + \frac{2x_2}{(1 - x_2^2)} \cdot z(x_2) \ + \ 2 \cdot \frac{1}{1 - x_2^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{1 - x_2^2}\right) \stackrel{*}{=}$$
$$\stackrel{*}{=} -2\big(y(x_2)\big)^2 + 2 \cdot \frac{1}{1 - x_2^2}\left(\frac{1}{4} \ + \ \frac{k^2}{1 - x_2^2}\right) > 0 \ .$$

Равенство $*$ верно в силу $z(x_2) = -y(x_2)$, а последнее неравенство в силу (16). Но при этом $\big(y(x_2) + z(x_2)\big)' \leqslant 0$, ведь это первая точка, в которой эта сумма перестала быть положительной. Полученное противоречие показывает, что $\big(z(x) + y(x)\big)$ больше нуля на $(0, 1)$, из чего, как мы знаем, следует второе неравенство в (14), а, следовательно, и всё (14).

5. Заключение

В двумерном случае задача решена, ответ

$$\begin{cases} \alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \ , \ \ ||T||^2 = \dfrac{\pi - \alpha}{\alpha} \\ \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \ , \ \ ||T||^2 = \dfrac{\alpha}{\pi - \alpha} \ . \end{cases} \tag{21}$$

В трёхмерном случае задача сведена к поиску супремума по целым неотрицательным k и вещественным неотрицательным s выражения

$$\frac{g(\alpha)g'(\pi - \alpha)}{g'(\alpha)g(\pi - \alpha)} \ ,$$

где $g(\theta) = P^k_{-\frac{1}{2}+2is}(\cos\theta)$, где $P^k_{-\frac{1}{2}+2is}$ – присоединённая функция Лежандра первого рода.

При $s = 0$ про это выражение выяснено, что для любого k при $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ оно больше единицы, а при $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ оно меньше единицы. Отсюда следует, что $||T|| > 1$ при $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Более того, из асимптотики $f(x)$ при $x \to 1$ и $k = 0$ следует, что при $\alpha \to 0$ выполнено $||T|| \to \infty$.

Список литературы

[1] М. Абрамовиц и И. Стиган Справочник по специальным функциям — Москва "Наука" Главная редакция физико-математической литературы 1979

[2] Н. Лебедев Специальные функции и их приложения — Государственное издательство физико-математической литературы Москва 1963 Ленинград

[3] И. Градштейн и И. Рыжик Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — Государственное издательство физико-математической литературы Москва 1963